43 A/ 1. Montrer que l'équation $(E): x+\ln x=0$ admet une unique solution α appartenant à $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$.

2. Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ définie par $\varphi(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

a. Vérifier que $\varphi(x)=x$, si et seulement si, $\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

b. En déduire que $\frac{1}{\alpha}$ est l'unique solution de $\varphi(x)=x$ dans $]0,+\infty[$.

c. Montrer que pour tout x de $[\frac{3}{2}, 3]$, $|\varphi'(x)|\leq\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}$.

3. Soit (v_n) la suite définie par $v_0=2$ et $v_{n+1}=\varphi(v_n)$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que pour tout entier n, $\frac{3}{2}\leq v_n\leq 2$.

b. Démontrer que pour tout entier n, $\left|v_{n+1}-\frac{1}{\alpha}\right|\leq\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}\left|v_n-\frac{1}{\alpha}\right|$.

c. En déduire que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

B/ Etude d'une fonction.

On considère la fonction f définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+\ln x} & \text{si } x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{\alpha\},\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe C dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(On prendra $\alpha\simeq 0.6$).

C/ Encadrement d'une aire.

Pour tout entier non nul n, on pose

$$u_n=\int_1^2\left(\frac{\ln x}{x}\right)^n dx.$$

1. Calculer u_1.

2. Montrer à l'aide de deux intégrations par parties que $u_2=1-\ln 2-\frac{(\ln 2)^2}{2}$.

3. Soit un réel $x>0$ et n un entier naturel non nul. Simplifier la somme

$$1-\frac{\ln x}{x}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2+\ldots(-1)^n\left(\frac{\ln x}{x}\right)^n.$$

4. Pour tout entier non nul n, on pose $I_n=1-u_1+u_2+\ldots+(-1)^n u_n$ et $I=\int_1^2 f(x)dx$.

a. Montrer que $I-I_n=\int_1^2(-1)^{n+1}f(x)\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}dx$.

b. Montrer que pour tout $x>0$, $\frac{\ln x}{x}\leq\frac{1}{e}$, puis que $|I-I_n|\leq\frac{1}{e^{n+1}}$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

d. Vérifier que $I_2-\frac{1}{e^3}\leq I\leq I_2$.

D/ Fonction définie à l'aide d'une intégrale.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$F(x)=\int_1^{e^x} f(t)dt.$$

1. Etudier la dérivabilité de F et déterminer $F'(x)$.

2. Vérifier que pour tout $t\geq 1$, $\frac{t}{t+\ln t}\geq\frac{1}{2}$.

3. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$.

4. Donner l'allure de la courbe de F.

Qarray.tn Aqra Blech Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn